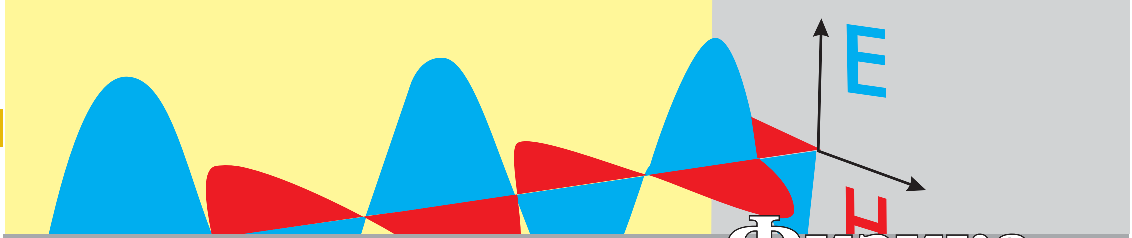

Бондаров Михаил Николаевич
Учитель физики лицея №1501 и ГОУ ЦО «Технологии обучения» г. Москвы.

Задачи с выбором ответа

В статье рассматриваются некоторые методы анализа алгебраического (буквенного) ответа к физической задаче, позволяющие обнаружить неверные ответы без решения задачи. Уверенное владение предложенными методами может оказаться полезным, например, при анализе ответов в олимпиадных задачах и при выполнении заданий группы А и С Единого государственного экзамена (ЕГЭ).

Введение

Процесс решения задачи можно сравнить со штурмом горной вершины. Действительно, каждый шаг в процессе решения постепенно приближает нас к ответу, как альпиниста к его заветной мечте. Однако нетрудно заметить, что в этом сравнении есть и существенное отличие. Можно ли представить себе альпиниста, который остановится в десятке метров от вершины, посчитав, что выполнил свою задачу? А ведь с решением задач нередко происходит именно так: дойдя до буквенного ответа и не проводя численных расчётов, мы заглядываем в раздел «Ответы» задачника и, убедившись в том, что буквенный ответ сошёлся, успокаиваемся, считая, что процесс решения задачи закончен. О том, как важно уметь доводить решение задачи до численного ответа, в данной статье мы не будем останавливаться: это тема отдельного разговора. А что делать, если нет возможности для сравнения своего ответа с правильным? Наша цель – показать методы и возможности анализа буквенного ответа к задаче. Этими методами широко пользуются физики, и их применение может помочь в тех случаях, когда нет возможности сравнить свой ответ с авторским (например, во время олимпиад или ЕГЭ). Этими же методами можно воспользоваться, если предлагается выбрать правильный ответ из нескольких предложенных.

Методы выбора ответа

На уроках физики нередко случается так: ученики предлагают свои решения различных задач учителю, а он, не решая задачи, лишь мельком взглянув на ответы учеников, сразу отмечает, в решениях каких задач допущены ошибки. Как это делает учитель? Какими приёмами он владеет?

Рассмотрим некоторые из них подробнее на примере нескольких известных задач. К задачам даны варианты ответов, среди которых один верный. Требуется выбрать верный ответ, не решая задачу. Краткие решения задач приведены в конце статьи.

Задача 1. В ящик массой M, подвешенный на нити, попадает пуля массой m, летевшая с горизонтальной скоростью v, и застревает в нём. В результате максимальный угол отклонения нити от вертикали оказался меньше 90°. На какую максимальную высоту h поднялся ящик после попадания пули? Размеры ящика малы по сравнению с длиной нити.

Возможные ответы:

A. $h=\dfrac{Mm}{M+m}\cdot\dfrac{v_0^2}{2g}$.

B. $h=\dfrac{M-m}{M+m}\cdot\dfrac{v_0^2}{2g}$.

C. $h=\left(\dfrac{M}{M+m}\right)^2\dfrac{v_0^2}{2g}$.

D. $h=\left(\dfrac{m}{M+m}\right)^2\dfrac{v_0^2}{2g}$.

Для определения, какой из ответов правильный, воспользуемся «физическими соображениями».

В первую очередь – это *проверка на размерность*. Её не выдерживает ответ A: обратите внимание, что величина $\dfrac{v_0^2}{2g}$ имеет размерность длины, а величина $\dfrac{Mm}{M+m}$ – размерность массы, следовательно, величина $\dfrac{Mm}{M+m}\cdot\dfrac{v_0^2}{2g}$ имеет размерность массы, умноженной на длину, что не соответствует размерности искомой величины – высоты.

Рассмотрим теперь случай, когда масса пули уменьшается, стремясь к нулю. Тогда очевидно, что высота подъёма ящика должна быть пренебрежимо мала. Однако из ответов B и C этого не следует. Наоборот, при $m\to 0$ высота подъёма ящика с пулей стремится к конечной величине $h\to\dfrac{v_0^2}{2g}$, что не соответствует физической реальности.

Итак, ответы B и C не прошли *проверку на частный (асимптотический) случай*, когда ответ в задаче практически очевиден. А вот оставшийся ответ D выдерживает описанные испытания. Именно он и является верным.

Задача 2. Автомобиль проехал первую треть пути со скоростью v_1, вторую треть пути – со скоростью v_2, а последнюю треть пути – со скоростью v_3. Определите среднюю скорость $v_{\text{ср}}$ автомобиля на всём пути.

Возможные ответы:

A. $v_{\text{ср}}=\dfrac{3v_1v_2v_3}{v_1+v_2+v_3}$.

B. $v_{\text{ср}}=\dfrac{3v_1v_2v_3}{v_1v_2+v_2v_3+v_1v_3}$.

C. $v_{\text{ср}}=\dfrac{v_1v_2v_3}{v_1v_2+v_2v_3+v_1v_3}$.

D. $v_{\text{ср}}=\dfrac{3v_1v_2v_3}{v_1v_2+2v_2v_3}$.

Произведём прежде всего проверку размерности и заметим, что ответ A ей не удовлетворяет: левая часть равенства измеряется в м/с, правая – в $(\text{м/с})^2$.

Вторым этапом проверки является рассмотрение такого частного случая общего вида решения, когда ответ в задаче является очевидным. В нашем случае для этого удобно представить, что автомобиль движется с одинаковой скоростью на всех участках. Итак, положим, что на протяжении всего пути скорость автомобиля оставалась постоянной, т. е. $v_1 = v_2 = v_3$. В этом частном случае ответ очевиден: $v_{ср} = v_1$. Однако ему противоречит ответ C, из которого следует, что $v_{ср} = v_1 / 3$.

Разберёмся теперь с ответом D. Он проходит проверку и на размерность, и на частный случай одинаковой скорости на всех участках. Обратим внимание на интересную особенность условия задачи: оно обладает определённой *симметрией*. Действительно, по отношению к вопросу о величине средней скорости не существенно, какую именно треть пути автомобиль двигался со скоростью v_1, какую – v_2 и какую – v_3. В таком случае можно сказать, что скорости равноправны, и при замене v_1 на v_2, v_2 на v_3 и v_3 на v_1 ответ не должен измениться. Проделав указанную замену, получим:

$$v_{ср} = \frac{3v_2v_3v_1}{v_2v_3 + 2v_3v_1} \neq \frac{3v_1v_2v_3}{v_1v_2 + 2v_2v_3}.$$

Следовательно, ответ D неправильный. Верным может быть только оставшийся ответ B. Кстати, он проходит испытания на все указанные виды проверки.

Задача 3. Брусок массой m_1 скользит по горизонтальной поверхности под действием груза массой m_2, прикреплённого к концу нерастяжимой нити, перекинутой через лёгкий неподвижный блок (рис. 1). Коэффициент трения бруска о поверхность равен μ. Найдите ускорение груза. Массами блока и нити, а также трением в оси блока пренебречь.

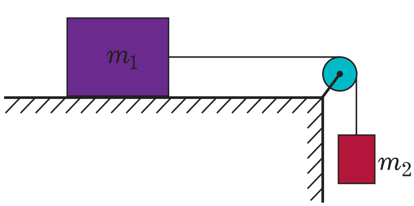

Рис. 1

Возможные ответы:

A. $a = \dfrac{\mu m_1 g}{m_1 + m_2}$.

B. $a = g\dfrac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2}$.

C. $a = g\dfrac{m_2 + \mu m_1}{m_1 + m_2}$.

D. $a = g\dfrac{m_2 - \mu m_1}{m_2 - m_1}$.

В этой задаче проверку на размерность проходят все ответы. Условие не содержит явных признаков симметрии, поэтому будем проводить испытание на частный случай.

В первую очередь обратим внимание на знак «–» в знаменателе ответа D. Из анализа этого ответа следует, что при равенстве масс бруска и груза ускорение груза должно стремиться к бесконечности, чего, конечно же, не наблюдается в действительности. Таким образом, ответ D неверен.

Рассмотрим теперь другой предельный случай: пусть масса бруска очень мала. Тогда очевидно, что нить не натянута, и груз будет свободно падать с ускорением g. Однако ответ A этому противоречит: из него следует, что при $m_1 \to 0$ ускорение $a \to 0$. Следовательно, ответ A также следует отбросить.

Осталось сделать выбор между ответами B и C. Они отличаются лишь знаками в числителе. Посмотрим, как будет изменяться искомое ускорение груза при увеличении коэффициента трения μ. Из физических соображений ясно, что в этом случае ускорение груза должно уменьшаться, чему противоречит ответ C, зато соответствует ответ B, который и является верным в этой задаче.

Задача 4. Две гири массами m_1 и m_2 $(m_2 > m_1)$ висят на концах невесомой и нерастяжимой нити, перекинутой через невесомый блок с неподвижной осью (рис. 2). Гири вначале находятся на одной высоте. Через какое время t после начала движения лёгкая гиря окажется выше тяжёлой на расстояние h? Трением в оси блока пренебречь.

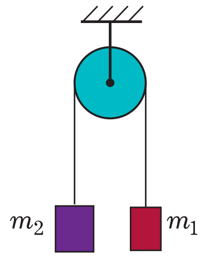

Рис. 2

Возможные ответы:

A. $t=\sqrt{\dfrac{h(m_1+m_2)}{g(m_2-m_1)}}$.

B. $t=\sqrt{\dfrac{2gh(m_1+m_2)}{m_1-m_2}}$.

C. $t=\sqrt{\dfrac{h(m_2-3m_1)}{g(2m_1+m_2)}}$.

D. $t=\sqrt{\dfrac{2h(m_2-m_1)}{g(m_2+m_1)}}$.

И в этой задаче начнём анализ ответов с проверки на размерность. Достаточно легко обнаружить, что такую проверку не выдерживает ответ B. Это сразу бросается в глаза, если вы помните, что сочетание параметров $\sqrt{2h/g}$ имеет размерность времени, а $\sqrt{2gh}$ – скорости.

В ответе C обратим внимание на коэффициенты 2 и 3: их происхождение в ответе разумным способом объяснить вряд ли возможно. Поэтому данный ответ не может быть верным.

Осталось сделать выбор между ответами A и D. После рассмотрения задачи 3 наше внимание может привлечь знак «–» в знаменателе ответа A. Посмотрим, что произойдёт с ответами, если масса второй гири станет равна массе первой. Тогда из ответа A следует, что искомое время стремится к бесконечности, в то время как ответ D даёт конечный результат. А что говорят нам физические соображения? Очевидно, что если массы гирь одинаковы, то ускоряться они не будут и придётся очень долго (точнее, бесконечно долго) ждать, когда одна из гирь начнёт подниматься. Таким образом, приходится отбросить ответ D. Итак, верным будет ответ A.

Задачи для самостоятельного выбора верного ответа

В разобранных выше задачах мы показали некоторые приёмы для определения заведомо неверного ответа. Для тренировки предлагаем несколько задач из разных разделов курса физики. Из предложенных после условий задач четырёх возможных ответов вам нужно, не решая задачи, выбрать верный ответ. Проверить свой выбор вы можете по таблице в конце этого раздела.

Задача 5. Тележка длиной l и массой M стоит на рельсах. На её противоположных концах находятся два человека массами m_1 и m_2 $(m_1>m_2)$. Люди меняются местами. На какое расстояние s относительно земли переместится при этом тележка? Массой колёс тележки и трением в их осях пренебречь.

Возможные ответы:

A. $s=l\dfrac{m_1+m_2}{M+m_1+m_2}$.

B. $s=l\dfrac{m_1-m_2}{M+m_1+m_2}$.

C. $s=l\dfrac{Mm_1m_2}{M+m_1+m_2}$.

D. $s=l\dfrac{m_1-m_2}{M+2m_1+m_2}$.

Задача 6. В двух сосудах находится один и тот же газ. Объёмы сосудов V_1 и V_2, давление и температура газа в сосудах p_1, T_1 и p_2, T_2 соответственно. После соединения сосудов в них установилась температура T. Найдите давление p в соединённых сосудах.

Возможные ответы:

A. $p=\dfrac{T}{V_1+V_2}\left(\dfrac{p_1V_1}{T_1}+\dfrac{p_2V_2}{T_2}\right)$.

B. $p=\dfrac{V_1+V_2}{T}\left(\dfrac{T_1}{p_1V_1}+\dfrac{T_2}{p_2V_2}\right)$.

C. $p=\dfrac{2T}{V_1+V_2}\left(\dfrac{p_1V_1}{T_1}+\dfrac{p_2V_2}{T_2}\right)$.

D. $p=\dfrac{T}{V_1+V_2}\left(\dfrac{p_1V_1}{2T_1}+\dfrac{3p_2V_2}{2T_2}\right)$.

Задача 7. Конденсатор ёмкостью C_1, заряженный до напряжения U_1, подключают параллельно конденсатору ёмкости C_2, заряженному до напряжения U_2. Какое количество теплоты Q выделится при этом?

Возможные ответы:

A. $Q=\dfrac{C_1C_2(U_1+U_2)^2}{2(C_1-C_2)}$.

B. $Q=\dfrac{C_1C_2(U_1-U_2)^2}{2C_1+C_2}$.

C. $Q=\dfrac{C_1C_2(U_1-U_2)^2}{2(C_1+C_2)}$.

D. $Q=\dfrac{(C_1+C_2)(U_1-U_2)^2}{2C_1C_2}$.

Задача 8. Кольцо сварено из двух полуколец радиуса R, скорости звука в которых равны c_1 и c_2. Через какое время t встретятся звуковые волны, возбуждённые ударом по точке сварки?

Возможные ответы:

A. $t=\pi R\dfrac{c_1+c_2}{2c_1c_2}$.

B. $t=\dfrac{2\pi R}{c_1c_2}$.

C. $t=\pi R\dfrac{c_1-c_2}{c_1c_2}$.

D. $t=\dfrac{2\pi R}{2c_1+c_2}$.

Верные и ошибочные ответы к задачам 5–8

Номер задачи	Верный ответ	Не проходит проверку на размерность	Не проходит проверку на частный случай	Не проходит проверку на симметрию
5	B	C	A	D
6	A	B	C	D
7	C	D	A	B
8	A	B	D	C

Краткий комментарий к таблице

Задача 5. Ответ A не проходит проверку на частный случай (если $m_1=m_2$, то из формулы следует, что $s\neq 0$, что противоречит физическому смыслу), ответ D – на симметрию (коэффициент 2 в знаменателе противоречит равноправию величин m_1 и m_2).

Задача 6. Ответ C даёт ошибку в частном случае (если $p_2=p_1$ и $T_2=T_1$, то очевидно, что давление p в соединённых сосудах должно быть равно p_1, а из формулы C следует, что $p=2p_1$), ответ D противоречит симметрии в условии (обратите внимание на коэффициент 3 в числителе второй дроби!).

Задача 7. Ответ A неверен из-за частного случая: при $C_1\to C_2$ количество выделившейся теплоты неограниченно растёт, чего не может быть.

Задача 8. Ответ C не проходит проверку на частный случай (если скорость звука в полукольцах будет одинакова, т. е. $c_1 = c_2$, то очевидно, что искомое время t не должно быть равно нулю, как это следует из ответа C).

Краткие решения задач 1 – 8

Задача 1. Применим к системе «пуля – ящик» закон сохранения импульса:

$$mv_0 = (M+m)v, \qquad (1)$$

где v – скорость пули и ящика сразу после попадания пули в ящик.

Из закона сохранения механической энергии следует, что

$$\frac{(M+m)v^2}{2} = (M+m)gh, \qquad (2)$$

откуда $h = \left(\dfrac{m}{M+m}\right)^2 \dfrac{v_0^2}{2g}$.

Задача 2. Средняя скорость $v_{ср}$ равна отношению пройденного пути s ко времени t, за которое путь пройден:

$$v_{ср} = \frac{s}{t}, \qquad (3)$$

где

$$t = \frac{s}{3v_1} + \frac{s}{3v_2} + \frac{s}{3v_3} = \frac{s(v_1v_2 + v_2v_3 + v_1v_3)}{3v_1v_2v_3}. \qquad (4)$$

Подставляя выражение (4) в формулу (3), получим

$$v_{ср} = \frac{s \cdot 3v_1v_2v_3}{s(v_1v_2 + v_2v_3 + v_1v_3)} = \frac{3v_1v_2v_3}{v_1v_2 + v_2v_3 + v_1v_3}.$$

Задача 3. Запишем уравнение второго закона Ньютона для бруска массой m_1 в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси, а для груза массой m_2 – на вертикальную ось:

$$T - F_{тр} = m_1a, \qquad (5)$$

$$N - m_1g = 0, \qquad (6)$$

$$m_2g - T = m_2a. \qquad (7)$$

При этом мы учли, что из условия невесомости нити следует равенство модулей сил натяжения нити T, а из её нерастяжимости – равенство модулей ускорений a тел. При скольжении сила трения определяется из формулы $F_{тр} = \mu N$, откуда с учётом (6) получим:

$$F_{тр} = \mu m_1 g. \qquad (8)$$

Из уравнений (5), (7) и (8) определим искомое ускорение

$$a = g\frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2}.$$

Задача 4. Запишем уравнение второго закона Ньютона для каждой гири в проекциях на вертикальную ось с учётом равенства модулей сил натяжения T и ускорений тел a:

$$m_2g - T = m_2a, \qquad (9)$$

$$T - m_1g = m_1a, \qquad (10)$$

откуда

$$a = g\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}. \qquad (11)$$

За время t каждая гиря пройдёт из состояния покоя расстояние

$$\frac{h}{2} = \frac{at^2}{2}. \qquad (12)$$

Из уравнений (11) и (12) найдём искомое время

$$t = \sqrt{\frac{h(m_1 + m_2)}{g(m_2 - m_1)}}.$$

Задача 5. Поскольку система замкнутая, то её центр масс при движении людей и тележки останется на прежнем месте. Приравняем к нулю перемещение центра масс:

$$0 = \frac{Ms_x + m_1s_{1x} + m_2s_{2x}}{M + m_1 + m_2},$$

где $s_{1x} = l - s$ – проекция перемещения человека массой m_1, $s_{2x} = -(l+s)$ – проекция перемещения человека массой m_2, $s_x = -s$ – проекция перемещения тележки массой M. Тогда $m_1(l-s)+m_2(-l-s)-Ms=0$, откуда

$$s=l\frac{m_1-m_2}{M+m_1+m_2}.$$

Задача 6. После соединения сосудов каждый газ займёт объём V_1+V_2, а их парциальные давления p_1' и p_2' можно найти из объединённого газового закона:

$$\frac{p_1V_1}{T_1}=\frac{p_1'(V_1+V_2)}{T}\Rightarrow p_1'=\frac{p_1V_1T}{(V_1+V_2)T_1};$$

$$\frac{p_2V_2}{T_2}=\frac{p_2'(V_1+V_2)}{T}\Rightarrow p_2'=\frac{p_2V_2T}{(V_1+V_2)T_2}.$$

Из закона Дальтона следует, что давление смеси идеальных газов p равно сумме парциальных давлений p_1' и p_2':

$$p=p_1'+p_2'=\frac{p_1V_1T}{(V_1+V_2)T_1}+\frac{p_2V_2T}{(V_1+V_2)T_2}=$$

$$=\frac{T}{V_1+V_2}\left(\frac{p_1V_1}{T_1}+\frac{p_2V_2}{T_2}\right).$$

Задача 7. Из закона сохранения электрического заряда найдём конечное напряжение U на конденсаторах:

$$C_1U_1+C_2U_2=(C_1+C_2)U\Rightarrow$$

$$\Rightarrow U=\frac{C_1U_1+C_2U_2}{C_1+C_2}.$$

Запишем закон сохранения энергии

$$W_1=W_2+Q,$$

где $W_1=\frac{C_1U_1^2}{2}+\frac{C_2U_2^2}{2}$ – начальная электростатическая энергия системы, $W_2=\frac{(C_1+C_2)U^2}{2}$ – конечная электростатическая энергия системы, Q – количество выделившейся теплоты.

Из записанных выше уравнений получаем:

$$Q=\frac{C_1C_2(U_1-U_2)^2}{2(C_1+C_2)}.$$

Задача 8. Пусть более медленная звуковая волна проходит от точки удара A до места встречи B с более быстрой волной расстояние x (рис. 3), двигаясь со скоростью c_2 и затратив на это время $t=\frac{x}{c_2}$. Тогда другая волна затратит то же время, пройдя половину кольца со скоростью c_1, а затем расстояние $\pi R-x$, двигаясь со скоростью c_2: $t=\frac{\pi R}{c_1}+\frac{\pi R-x}{c_2}$. Из записанных уравнений определим искомое время:

$$t=\pi R\frac{c_1+c_2}{2c_1c_2}.$$

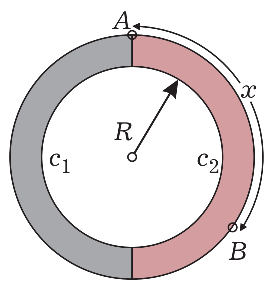

Рис. 3

Выводы

В заключение перечислим основные методы проверки буквенного ответа:

1) проверка на размерность;
2) проверка на частный случай;
3) проверка на симметрию.

Подчеркнём ещё раз, что эти проверки не гарантируют того, что ответ обязательно верен. Однако если ответ не проходит одну из перечисленных выше проверок, то это является гарантией того, что он неверен.

В современных вариантах ЕГЭ можно встретить задания, где мог бы пригодиться подобный анализ ответов. Это относится и к задачам различных олимпиад. Разобранные на уроках задания, аналогичные предложенным выше, могли бы служить неплохой проверкой качества усвоения выпускниками школьного курса физики.